**МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА**

# МАТУРСКИ РАД

**Из предмета Вероватноћа и математичка статистика**

# Стирлингови бројеви друге врсте

**Ученик** **Ментор**

**Душан Драгутиновић, IVc** **Бојана Милошевић**

**Београд, јун 2015.**

# Садржај


Апстракт ........ 1

Увод ........ 2

1 Основни појмови ........ 3

2 Стирлингови бројеви прве врсте ........ 4

3 Стирлингови бројеви друге врсте ........ 6

  3.1 Некомбинаторна дефиниција ........ 8

  3.2 Различите нотације ........ 9

4 Белови бројеви ........ 10

5 Идентитети ........ 11

  5.1 Падајући и растући полином ........ 11

  5.2 Остали идентитети ........ 14

6 Примене ........ 15

7 Закључак ........ 17

8 Литература ........ 18

**АПСТРАКТ**

У овом раду детаљно су представљени Стирлингови бројеви друге врсте, који имају примену у разним математичким дисциплинама, превасходно у комбинаторици и теорији вероватноће, а престављени су и Стрилингови бројеви прве врсте, са незнатно мањом применом. Дефиниције ових бројева дате су комбинаторно, преко броја партиција $n$-точланог скупа у тачно $k$ блокова, односно преко броја пермутација $n$-точланог скупа у тачно $k$ циклуса. Такође, дата је и занимљива дефиниција Стирлинговых бројева друге врсте из рада [5], која није комбинаторна. Поред тога, у овом раду показано је да важе одређени идентитети у вези са овим бројевима и показано је да се Стирлингови бројеви друге врсте јављају у $n$-том моменту случајне величине са Поасоновом расподелом.

***Кључне речи: Стирлингови бројеви прве врсте, Стирлингови бројеви друге врсте, циклуси, партиције, комбинаторика***

# Увод

Стирлингови бројеви добили су име по великом шкотском математичару Џејмсу Стирлингу[1]. Њихова примена је значајна у разним математичким дисциплинама, па су тако кроз историју често проучавани иако се није увек наводило њихово име. Деле на Стирлингове бројеве прве врсте и Стирлингове бројеве друге врсте. У овом раду, претежно ћемо се бавити Стирлинговим бројевима друге врсте, чија је појава најчешћа у комбинаторици и у теорији вероватноће, а споменућемо и Стирлингове бројеве прве врсте, као и везе између ове две врсте Стирлингових бројева.

Кароли (Чарлс) Џордан[2] је 1939. у својој књизи *Calculus of finite Differences* детаљно описао Стирлингове бројеве и изнео резултате у вези са њима. На тај начин су Стирлингови бројеви добили много значајнију улогу у математици. У тој књизи, налази се и следећи занимљив цитат: *„Стирлингови бројеви су од највеће користи у математичкој анализи. Ипак, то није било у потпуности препознато, јер су бројеви били ретко коришћени и занемарени. То је управо због чињенице да су их различити аутори уводили под различитим именима и ознакама, без спомињања да је реч о истим бројевима. Стирлингови бројеви су једнако важни, ако не и важнији од Бернуллијевих бројева; требало би да они заузму средишњу позицију у математичкој анализи коначних диференција*“ (Борис Докић 2013: 167).

На самом почетку увешћемо основне појмове из комбинаторике, који ће нам користити у наставку рада. Потом ћемо се у другом поглављу упознати са појмом циклуса, преко ког ћемо дефинисати Стирлингове бројеве прве врсте. У трећем поглављу сусрешћемо се са партицијама скупа у блокове и дефинисаћемо Стирлингове бројеве друге врсте и представићемо дефиницију Стирлингових бројева друге врсте из рада [5] која није комбинаторна. У четвртом поглављу бавићемо се Беловим бројевима, који одређују број свих партиција неког $n$-точланог скупа, а потом ћемо у петом поглављу показивати одређене идентитете у вези са овим бројевима. На самом крају, у шестом поглављу, показаћемо једну примену Стирлингових бројева у теорији вероватноће.

[1] James Stirling (1692-1770), шкотски математичар

[2] Károly (Charles) Jordan (1871-1959), мађарски математичар

# 1 Основни појмови

На почетку, потребно је позабавити се уводним појмовима који ће нам касније користити.

*Пермутација* $\pi$ неког $n$-точланог скупа представља распоред свих елемената тог скупа у низ дужине $n$, тј. распоређивање тих елемената на $n$ места, где ће сваки елемент бити на посебном месту. Укупан број пермутација неког скупа $X$ са $n$ елемената једнак је $n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$.

Ако и елементе из скупа $X$ и места на која их распоређујемо означимо бројевима $1, 2, ..., n$, тада сваки распоред елемената скупа $X$ на $n$ места представља бијекцију $\pi : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$. Важи и обратно, свака бијекција на скупу $\{1, 2, ..., n\}$ дефинише распоред елемената из $X$ на $n$ места. Због тога можемо рећи да је пермутација пресликавање $\pi : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$ које је бијекција.

*Комбинацијом* $k$-тог реда неког $n$-точланог скупа $X$ називамо сваки $k$-члани подскуп скупа $X$. Укупан број таквих комбинација означавамо са $\binom{n}{k}$, при чему је:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Бројеви облика $\binom{n}{k}$ често се називају биномним коефицијентима и јављају се приликом развоја бинома $(x+y)^n$. Наиме, важи:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

*Партитивни скуп* скупа $X$ означавамо са $P(X)$ и он представља скуп свих подскупова скупа $X$. Према томе, елементи скупа $P(X)$ су подскупови скупа $X$. На пример, ако је $X = \{1, 2, 3\}$, тада је

$$P(X) = \{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Приметимо да скуп $P(X)$ из претходног примера има $8 = 2^3$ елемената. То је у вези са чињеницом да важи

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = (1+1)^3 = 2^3.$$

Уопштавајући ово, налазимо да скуп $X = \{1, 2, ..., n\}$ има

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

подскупова.

*Патрицијом скупа* $X$ зовемо сваки подскуп $P$ од $P(X)/\emptyset$ ако је унија свих елемената из $P$ једнака је скупу $X$ и ако за $A$ и $B$, где су $A$ и $B$ различити елементи из $P$, важи да је $A \cap B = \emptyset$.

На пример, ако је $X = \{1, 2, 3\}$, тада су партиције тог скупа:

$$P_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\},$$

$$P_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}\},$$
$$P_3 = \{\{1, 3\}, \{2\}\},$$
$$P_4 = \{\{2, 3\}, \{1\}\},$$
$$P_5 = \{1, 2, 3\}.$$

Приметимо да их има укупно 5.

# 2 Стирлингови бројеви прве врсте

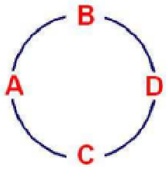
У овом поглављу, представићемо Стирлингове бројеве прве врсте, а пре увођења формалне дефиниције тих бројева, увешћемо појам *циклуса.*

У комбинаторици се често пребројава на колико начина се нешто може направити и какав све распоред посматраних елемената може бити под одређеним условима.

*Циклус* представља распоред у коме је искључиво битан редослед елемената, тј. у циклусу нам није битно који је елемент први, који други, и тако даље, већ нас само занима поредак елемената. То заправо значи да за сваки одабрани елемент циклуса као почетни, уколико идемо редом по елементима, имамо исти поредак елемената јер су „први“ и „последњи“ елемент циклуса међусобно повезани.

Сам циклус и његови елементи означавају се унутар угластих заграда, а сами елементи циклуса одвајају се зарезом. На слици испод је приказан пример циклуса са 4 елемента: $[B, D, C, A]$

Ако скуп свих пермутација на скупу $\{1, 2, ..., n\}$ означимо са $\mathbb{S}_n$. Са $c(n, k)$ означава се број пермутација у скупу $\mathbb{S}_n$, које имају тачно $k$ циклуса. Тај број се назива **Стирлингов број прве врсте без знака**. Дакле,




овај број нам показује на колико начина можемо $n$ елемената поређати у $k$ циклуса. Илуструјмо ово следећим примером:

**Пример 2.1** *Нека је дат скуп $\{a, b, c, d\}$. Колико постоји 2-циклуса оваквог скупа?*

*Решење.* Дат нам је скуп од 4 елемента и тражимо све поретке ових елемената користећи 2 циклуса. Испишимо их редом:

$$[a][b,c,d], \quad [a][b,d,c], \quad [b][a,c,d], \quad [b][a,d,c],$$

$$[c][a,b,d], \quad [c][a,d,b], \quad [d][a,b,c], \quad [d][a,c,b],$$

$$[a,b][c,d], \quad [a,c][b,d], \quad [a,d][b,c]$$

Можемо приметити да је укупан број свих начина да скуп од 4 елемента поређамо у 2 циклуса једнак 11. По начину на који смо поставили проблем, видимо да је решење овог проблема заправо Стирлингов број прве врсте без знака $c(4, 2)$. □

**Теорема 2.2** *Бројеви $c(n, k)$ задовољавају следећу рекурентну релацију:*

$$c(n,k) = (n-1)c(n-1,k) + c(n-1,k-1),$$

уз почетне услове $c(n, k) = 0$, за $n < 0$ или $k < 0$ (осим за $k = n = 0$ када је $c(0, 0) = 1$).

*Доказ.* Када пермутацији из $\mathbb{S}_{n-1}$ са $k-1$ циклуса допишемо циклус $[n]$ дужине један, добије се пермутација из $\mathbb{S}_n$ са $k$ циклуса. На тај начин добијемо све пермутације скупа $\{1, 2, ..., n\}$ са $k$ циклуса код којих је $n$ фиксна тачка; њих је укупно $c(n-1, k-1)$.

Сада претпоставимо да $n$ није фиксна тачка пермутације $\pi$ из $S_n$ која има тачно $k$ циклуса. Можемо уочити да је таква пермутација $\pi$ добијена дописивањем $n$ иза неког од елемената из $\{1, 2, ..., n-1\}$ у неки од $k$ циклуса пермутације скупа $\{1, 2, ..., n-1\}$. Свакој од $c(n-1, k)$ пермутација из $\{1, 2, ..., n-1\}$ број $n$ се може дописати на $n-1$ начин.

Стога је број свих пермутација из $S_n$ са тачно $k$ циклуса којима $n$ није фиксна тачка једнак $(n-1)c(n-1,k)$. Сада се рекурентна релација из теореме добије помоћу принципа збира. $\square$

**Стирлингов број прве врсте** дефинишемо са:

$$s(n,k) = (-1)^{n-k}c(n,k)$$

Користећи претходну теорему, добијамо да Стирлингови бројеви $s(n,k)$ задовољавају следећу рекурентну релацију:

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k)$$

У следећој табели налазе се вредности Стирлингових бројева $s(n,k)$ за неке вредности $n$ и $k$.

| $n \setminus k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | | |
| 2 | 0 | −1 | 1 | | | | | | |
| 3 | 0 | 2 | −3 | 1 | | | | | |
| 4 | 0 | −6 | 11 | −6 | 1 | | | | |
| 5 | 0 | 24 | −50 | 35 | −10 | 1 | | | |
| 6 | 0 | −120 | 274 | −225 | 85 | −15 | 1 | | |
| 7 | 0 | 720 | −1764 | 1624 | −735 | 175 | −21 | 1 | |
| 8 | 0 | −5040 | 13068 | −13132 | 6769 | −1960 | 322 | −28 | 1 |

# 3 Стирлингови бројеви друге врсте

Стирлингови бројеви друге врсте присутнији су од Стирлингових бројева прве врсте у пракси. У овом поглављу навешћемо њихова својства, а пре тога ћемо објаснити појам партиције скупа у $k$ блокова.

Партиција скупа $X$ у $k$ блокова је подела свих елемената скупа $X$ у $k$ непразних дисјуктних подскупова од $X$. Другим речима, партиција скупа $X$ у $k$ блокова је $k$-члани скуп $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ подскупова од $X$ тако да је $X = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$, $A_i \neq \emptyset$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, за све $1 \leq i < j \leq k$.

Број партиција скупа од $n$ елемената у тачно $k$ блокова означава се са $S(n,k)$ и зове се **Стирлингов број друге врсте**, при чему је $S(0,0) = 1$, а из саме дефиниције следи да је $S(n,k) = 0$ за $n < k$.

**Пример 3.1** *Нека је дат скуп* $\{1, 2, 3, 4\}$*. Колико постоји партиција овог скупа у 2 блока?*

*Решење.* Испишимо ове партиције редом:

$\{1, 2, 3\}\,\{4\}$, $\{1, 2, 4\}\,\{3\}$, $\{1, 3, 4\}\,\{2\}$, $\{2, 3, 4\}\,\{1\}$, $\{1, 2\}\,\{3, 4\}$, $\{1, 3\}\,\{2, 4\}$, $\{1, 4\}\,\{2, 3\}$.

Дакле, постоји 7 оваквих партиција, те је $S(4, 2) = 7$. □

**Пример 3.2** *Доказати да за све* $n \in \mathbb{N}$ *важи:*

$$S(n, n) = S(n, 1) = 1, \quad S(n, n-1) = \binom{n}{2}, \quad S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$$

*Решење.* Из дефиниције Стирлинговых бројева очигледно важи $S(n, n) = S(n, 1) = 1$.

Број $S(n, n-1)$ добијемо када изаберемо два елемената из $\{1, 2, ..., n\}$ који ће бити у истом блоку, што можемо учинити на $\binom{n}{2}$ начина.

Уочимо скуп $X = \{(A, B) : A \cup B = \{1, 2, ..., n\}\,, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset\}$ Како је скуп $B = \{1, 2, ..., n\} \setminus A$, и како је $A$ подскуп од $\{1, 2, ..., n\}$ такав да је $A \neq \emptyset, A \neq \{1, 2, ..., n\}$, то је $|X| = 2^n - 2$. Да бисмо одредили $S(n, 2)$ приметимо да свакој партицији $\{A, B\}$ скупа $\{1, 2, ..., n\}$ одговарају два различита уређена пара из $X$. Тако је:

$$S(n, 2) = \frac{|X|}{2} = 2^{n-1} - 1.$$

□

**Теорема 3.3** *Стирлингови бројеви друге врсте задовољавају следећу рекурентну релацију:*

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$$

*Доказ.* Све партиције скупа $\{1, 2, ..., n\}$ у $k$ блокова поделимо у две групе:

Прву групу чине партиције у којима је $n$ једночлан блок. Како се осталих $n-1$ елемената треба распоредити у $k-1$ блокова, ових партиција има $S(n-1, k-1)$.

У другој групи су партиције у којима број $n$ није „сам“ у блоку. Те партиције настану додавањем броја $n$ у један од $k$ блокова неке од $S(n-1,k)$ партиција скупа $\{1,2,...,n-1\}$ у $k$ блокова.

Рекурентну релацију за $S(n,k)$ добијемо користећи принцип суме. $\square$

Неке вредности Стирлингових бројева друге врсте дате су у следећој табели:

| $n \setminus k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 1 | | | | | | | |
| 3 | 0 | 1 | 3 | 1 | | | | | | |
| 4 | 0 | 1 | 7 | 6 | 1 | | | | | |
| 5 | 0 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | | | | |
| 6 | 0 | 1 | 31 | 90 | 65 | 15 | 1 | | | |
| 7 | 0 | 1 | 63 | 301 | 350 | 140 | 21 | 1 | | |
| 8 | 0 | 1 | 127 | 966 | 1701 | 1050 | 266 | 28 | 1 | |
| 9 | 0 | 1 | 255 | 3025 | 7770 | 6951 | 2646 | 462 | 36 | 1 |

Као, што смо и приметили, неке вредности за Стирлингове бројеве прве и друге врсте није тешко добити захваљујући одговарајућој комбинаторној интерпретацији.

Међутим, за Стирлингов број друге врсте $S(n,k)$ можемо наћи и тачну формулу. Тај број се појави при пребројавању сурјекција („на“ функција) са скупа $\{1,2,...,n\}$ у скуп $\{1,2,...,k\}$. Наиме, укупан број свих сурјекција из $n$-чланог скупа у $k$-члани скуп једнак је $k! \cdot S(n,k)$, јер партицију скупа $\{1,2,...,n\}$ у $k$ блокова можемо да уочимо на $S(n,k)$ начина, а затим на $k!$ начина одаберемо бијекцију која тих $k$ блокова слика у $\{1,2,...,k\}$. Са друге стране, методом укључења и искључења, на пример у књизи [1] добијено је да је укупан број суркеција из $n$-чланог скупа у $k$-члани једнак $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$, те важи формула:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$$

## 3.1 Некомбинаторна дефиниција

У раду [5] преставељена је једна занимљива некомбинаторна дефиниција Стирлингових бројева друге врсте. Наиме, показано је да се Стирлингови бројеви друге врсте јављају као коефицијенти у изразима за изводе вишег реда функције $f(e^x)$, где је $f \in C^\infty(0,+\infty)$ нека произвољна функција. Покажимо сада ту везу.

Дакле, нека је $f \in C^\infty(0,+\infty)$ произвољна функција. Рачунајући изводе вишег реда функције $f(e^x)$ по $x$ и узимајући $t = e^x$ добијамо:

$$[f(e^x)]' = tf'(t)$$

$$[f(e^x)]'' = tf'(t) + t^2 f''(t)$$

$$[f(e^x)]''' = tf'(t) + 3t^2 f''(t) + t^3 f'''(t)$$

Знајући да важи

$$[t^k f^{(k)}(t)]'_x = kt^k f^{(k)}(t) + t^{k+1} f^{(k+1)}(t),$$

израз $[f(e^x)]^{(n)}$ можемо записати на следећи начин:

$$[f(e^x)]^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) t^k f^{(k)}(t),$$

где су $S(n,k)$ природни бројеви који не зависе од $f(x)$.

## 3.2 Различите нотације

У овом раду Стирлингове бројеве прве врсте означавамо са $s(n,k)$, а Стирлингове бројеве друге врсте са $S(n,k)$. Међутим за Стирлингове бројеве још увек нису усвојене стандардне ознаке. Поред ове нотације, у доста радова се појављује нотација помоћу угластих и витичастих заграда коју је увео наш математичар Јован Карамата[3].

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = s(n,k) = (-1)^{n-k} c(n,k).$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = S(n,k)$$

Рекурентне релације за овако записане Стирлингове бројеве подсећају на релацију за биномне коефицијенте:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = k \cdot \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}$$

[3] Јован Карамата (1903-1967), српски математичар

# 4 Белови бројеви

Број свих партиција скупа $\{1, 2, ..., n\}$ на непразне блокове назива **Белов број** и означава се са $B(n)$, при чему је $B(0) = 1$, а за $n \geq 0$ важи да је Белов број сума по $k$ Стирлинговых бројева друге врсте за $n$, тј. $B(n) = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)$. У следећој табели дате су неке вредности Белових бројева $B(n)$ за неке вредности броја $n$.

| n | S(n,0) | S(n,1) | S(n,2) | S(n,3) | S(n,4) | S(n,5) | S(n,6) | B(n) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | 1 |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | | | | | 2 |
| 3 | 0 | 1 | 3 | 1 | | | | 5 |
| 4 | 0 | 1 | 7 | 6 | 1 | | | 15 |
| 5 | 0 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | | 52 |
| 6 | 0 | 1 | 31 | 90 | 65 | 15 | 1 | 203 |

Белови бројеви, слично као и Стирлингови бројеви, задовољавају лепу рекурентну релацију.

**Теорема 4.1** *За све $n \in \mathbb{N}_0$ важи:*

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k)$$

*Доказ.* Ову рекурентну релацију доказаћемо тако што ћемо показати да и десна страна једнакости пребројава све партиције скупа $\{1, 2, ..., n+1\}$. Претпоставимо да је елемент $n+1$ у блоку величине $n-k+1, k = 0, 1, ..., n$. Остале елементе тог блока можемо изабрати на $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, а након тога преосталих $k$ елемената можемо разместити у блокове на $B(k)$ начина. $\square$

**Пример 4.2** *Показати да за све $n \geq 3$ важи неједнакост:*

$$B(n) < n!$$

*Решење.* Ову неједнакост показаћемо индукцијом по $n$.
*База индукције.* За базу индукције узећемо $n = 3$: $B(3) = 5 < 6$.
*Индуктивна хипотеза.* Претпоставимо да за природне бројеве веће или

једнаке од 3, а мање или једнаке $n$ важи $B(n) < n!$.
*Индуктивни корак.*

$$B(n{+}1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k) < \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^{n} n(n{-}1)...(n{-}k{+}1) < (n{+}1)n!,$$

те је ово тврђење показано. $\square$

Једна од занимљивости у вези са Беловим бројевима је и могуће постојање бесконачно много Белових бројева који су прости. Првих неколико Белових бројева који су прости су: $2, 5, 877, 27644437, ...$ Највећи познати Белов број који је прост, јесте $B(2841)$ и он је приближно једнак $9.30740105 \cdot 10^{6538}$, што је доказано након 17 месеци коришћења програма *Primo*. Истим програмом проверено је да нема већих Белових простих бројева, који су већи од $B(2841)$, а да су мањи од $B(6000)$.

# 5 Идентитети

У овом поглављу показаћемо да важе одређени идентитети у вези са Стирлинговим бројевима.

## 5.1 Падајући и растући полином

Сваки полином степена највише $n$ се уобичајно записује помоћу монома $1, x, x^2, ..., x^n$. За сваки $r \in \mathbb{N}_0$ дефинишимо полиноме $x^{\underline{r}}$ и $x^{\overline{r}}$ као:

$$x^{\underline{r}} = x(x-1) \cdot ... \cdot (x-r+1), \quad x^{\overline{r}} = x(x+1) \cdot ... \cdot (x+r-1),$$

односно $x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1$. Полиноми $x^{\underline{r}}$ и $x^{\overline{r}}$ називају се падајући, односно растући полином од $x$.

Приметимо да важи следеће тврђење. Ако обичне степене од $x$ покушамо изразити преко $x^{\underline{r}}$, као коефицијенти ће се појавити Стирлингови бројеви друге врсте. Може се лако проверити да, на пример, важи:

$$x^5 = x^{\underline{5}} + 10x^{\underline{4}} + 25x^{\underline{3}} + 15x^{\underline{2}} + 11x^{\underline{1}}$$

**Теорема 5.1.1** *Нека је $n \in \mathbb{N}_0$. Тада важи следећи идентитет:*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) x^{\underline{k}}$$

*Доказ.* Овај идентитет показаћемо индукцијом по $n$, користећи познате рекурентне релације за Стирлингове бројеве.
*База индукција.* За $n = 1$ идентитет непосредно важи из дефиниције Стирлинговог бројева.
*Индуктивна хипотеза.* Претпоставимо да је претходна формула тачна за све $n \in \mathbb{N}_0$. Дакле, нека важи:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^{\underline{k}}$$

*Индуктивни корак.*

$$x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}(x-k+k)S(n,k)x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n}(S(n,k)x^{\underline{k+1}} + kS(n,k)x^{\underline{k}})$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(S(n,k-1)+kS(n,k))x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n+1} S(n+1,k)x^{\underline{k}}.$$

□

Без доказивања ћемо навести да и за Стирлингове бројеве прве врсте важи слична формула.

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k$$

Користећи идентитет из претходне теореме, у раду [8] је сума степена природних бројева изражена уз помоћ Стирлингових бројева друге врсте. За одређене вредности природног броја $m$ познате су и експлитицне формуле за израчунавање $\sum_{i=1}^{n} i^m$, на пример:

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

О вредности суме степена природних бројева за произвољно $m \in \mathbb{N}$ говори следећа теорема.

**Теорема 5.1.2** *Нека су $n, m \in \mathbb{N}$. Тада важи:*

$$\sum_{i=1}^{n} i^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S(m,k)k!$$

*Доказ.* Из претходне теореме можемо извести да важи:

$$n^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(m,k)k!,$$

знајући да је заправо $n^{\underline{k}} = \binom{n}{k}k!$. Суму $m$-тих степена можемо записати као:

$$\sum_{i=1}^{n} i^m = 1^m + 2^m + ... + n^m = \sum_{p=1}^{n} \left\{ \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} S(m,k)k! \right\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^m = \sum_{k=0}^{n} S(m,k)k! \left\{ \sum_{p=k}^{n} \binom{p}{k} \right\}.$$

Докажимо сада, користећи математичку индукцију по $n$, да важи следећа једнакост:

$$\sum_{p=k}^{n} \binom{p}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

*База индукције.* За $n = 0$ обе стране једнакости су 1 када је $k = 0$, односно 0 иначе.

*Индуктивна хипотеза.* Нека за неко $n \geq 1$ важи:

$$\sum_{p=k}^{n-1} \binom{p}{k} = \binom{n}{k+1}$$

*Индуктивни корак.* Тада важи:

$$\sum_{p=k}^{n} \binom{p}{k} = \sum_{p=k}^{n-1} \binom{p}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

Користећи познату рекурентну релацију за биномне коефицијенте, која је раније споменута у раду, следи:

$$\sum_{p=k}^{n} \binom{p}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Коначно, важи:

$$\sum_{i=1}^{n} i^m = 1^m + 2^m + ... + n^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S(m,k)k!$$

□

## 5.2 Остали идентитети

У књизи [6] показана су два идентитета у вези са сумирањем по колони $p$ таблице Стирлинговиx бројева друге врсте, као и један идентитет у вези са сумирањем по дијагонали таблице. У овом поглављу представићемо та три веома корисна идентитета у раду са Стирлинговим бројевима друге врсте.

**Теорема 5.2.1** *Нека су $n, p$ ненегативни цели бројеви. Тада важи:*

$$S(n+1, p+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(k,p)$$

*Доказ.* При прављењу партиције $n+1$ елемената у $p+1$ блокова, постоји $\binom{n}{k}$ начина да се одабере којих ће $n-k$ бројева бити у истом блоку као број $n+1$, а потом $S(k,p)$ начина да се осталих $k$ бројева смести у преосталих $p$ блокова, те овај идентитет важи. □

**Теорема 5.2.2** *Нека су $n, p$ ненегативни цели бројеви. Тада важи:*

$$S(n+1, p+1) = \sum_{k=0}^{n} (p+1)^{n-k} S(k,p)$$

*Доказ.* Доказ радимо индукцијом по $n$.
*База индукције.* За $n = 0$ овај идентитет очигледно важи.
*Индуктивна хипотеза.* Претпоставимо да важи следећа формула:

$$S(n, p+1) = \sum_{k=0}^{n-1} (p+1)^{n-k-1} S(k,p)$$

*Индуктивни корак.* Користећи познати рекурентну релацију између Стирлинговиx бројева и индуктивну хипотезу, добијамо да је $S(n+1, p+1)$ једнак:

$$S(n,p) + (p+1)S(n,p+1) = S(n,p) + (p+1)\sum_{k=0}^{n-1} (p+1)^{n-k-1} S(k,p)$$

$$S(n,p) + \sum_{k=0}^{n-1}(p+1)^{n-k}S(k,p) = \sum_{k=0}^{n}(p+1)^{n-k}S(k,p)$$

□

**Теорема 5.2.3** *Нека су n и p ненегативни цели бројеви. Тада важи:*

$$S(n+p+1,p) = \sum_{k=0}^{p} kS(n+k,k)$$

*Доказ.* Доказ поново радимо индукцијом, с тим што овог пута радимо индукцијом по $p$.
*База индукције.* Идентитет очигледно важи за све $n \geq 0$ када је $p = 0$.
*Индуктивна хипотеза.* Претпоставимо да важи следећа формула:

$$S(n+p,p-1) = \sum_{k=0}^{p-1} kS(n+k,k)$$

*Индуктивни корак.* Користећи познати рекурентну везу и индуктивну хипотезу, добијамо:

$$S(n+p+1,p) = S(n+p,p-1) + pS(n+p,p) = \sum_{k=0}^{p-1} kS(n+k,k) + pS(n+p,p)$$

$$S(n+p+1,p) = \sum_{k=0}^{p} kS(n+k,k)$$

□

# 6 Примене

Као што смо већ споменули, Стирлингови бројеви имају значајну примену у разним математичким дисциплинама, пре свега у комбинаторици и теорији вероватноће. У овом поглављу навешћемо једну примену из области теорије вероватноће. Наиме, показано је да је $n$-ти момент дискретне случајне величине $X$, која има Поасонову расподелу $Poiss(\lambda)$, једнак $\sum_{k=1}^{n} S(n,k)\lambda^k$, а ми ћемо у овом раду представити специјалан случај, када случајна величина $X$ има Поасонову расподелу $Poiss(1)$.

*Математичко очекивање* дискретне случајне величине је нумеричка карактеристика случајне величине, која преставља збир вероватноћа за сваки исход помножен вредношћу тог исхода и за неку случајну величину $X$ означава се са $EX$.

Ако је $n$ ненегативан цео број, а $X$ дискретна случајна величина, тада $X$ поседује *момент* реда $n$ ($n$-ти момент), у ознаци $E[X^n]$, ако $X^n$ има коначно математичко очекивање.

Ако је $X$ случајна величина која има Поасонову расподелу $Poiss(\lambda)$, тада за случајну величину $X$ важи закон расподеле:

$$P\{X = x\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \lambda > 0.$$

**Теорема 6.1** *Нека је $X$ случајна величина за коју важи $X \sim Poiss(1)$ и нека је $n \in \mathbb{N}_0$. Тада важи:*

$$E[X^n] = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) = B(n)$$

*Доказ.* У доказу овог тврђења користићемо идентитет из теореме 5.1.1 и познату суму $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$. Покажимо на почетку да за свако $n \in \mathbb{N}_0$ важи $E[X^{\underline{n}}] = 1$.

$$E[X^{\underline{n}}] = E[X(X-1)(X-2)...(X-n+1)] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)...(x-n+1)\frac{e^{-1}}{x!}$$

$$= \sum_{x=n}^{\infty} x(x-1)...(x-n+1)\frac{e^{-1}}{x!} = \sum_{x=n}^{\infty} \frac{x!}{(x-n)!}\frac{e^{-1}}{x!} = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-1}}{y!} = \frac{e}{e} = 1$$

Знајући ово, без већих проблема се доказује $E[X^n] = B(n)$:

$$E[X^n] = \sum_{k=1}^{n} E[X^{\underline{k}}]S(n,k) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) = B(n)$$

$\square$

# 7 Закључак

Стирлингови бројеви друге врсте $S(n,k)$ које смо у овом раду дефинисали као бројеве свих партиција скупа од $n$ елемената у $k$ блокова, али и као коефицијенте који се јављају у изразима за изводе вишег реда функције $f(e^x)$, где је $f \in C^{\infty}(0,+\infty)$ нека произвољна функција, користе се у комбинаторици и теорији вероватноће, али и у осталим математичким дисциплинама. У вези са Стирлинговим бројевима друге врсте, показан је идентитет са падајућим полиномом од $x$, као и одређени идентитети у вези са овим бројевима који се често користе у пракси, а пре свих показана је рекурентна релација, без које је готово неизводљиво разматрати проблеме у којима се користе ови бројеви. Такође, показано је да се сума $m$-тих степена природних бројева од 1 до $n$ може преставити користећи Стирлингове бројеве друге врсте. На самом крају, показано је да је $n$-ти моменат случајне величине са Поасоновом расподелом $Poiss(1)$ једнак Беловом броју, тј. суми Стирлингових бројева.

# 8 Литература

[1] Душко Јојић, *Елементи енумеративне комбинаторике* (2011)
[2] Павле Младеновић, *Комбинаторика* (2001)
[3] Жељко Зрно, *Партиција скупа и релације еквиваленције. Белови бројеви*, Осијечки математички лист 11 (2011)
[4] Борис Докић, *Стирлингови бројеви*, Осијечки математички лист 13 (2013)
[5] Милан Јањић,*О једној дефиницији Стирлинговиx бројева* (2009)
[6] Jonathan L. Gross, *Combinatorial Methods with Computer Applications* (2007)
[7] А. Аглић Аљиновић, *Екстермална комбинаторика* (2014)
[8] Khristo N. Boyadzhiev, *Close Encounters with the Stirling Numbers of the Second Kind* (2013)
[9] Bell Number, *Wolfram MathWorld*, *mathworld.wolfram.com* (2015)
[10] Bell numbers and moments of the Poisson distribution, *Mathematics Stack Exchange*, *math.stackexchange.com* (2015)
[11] Белешке Проф. Александра Ивића, *Вероватноћа и Статистика*, *rgf.bg.ac.rs* (2015)